

# マトロイドの階数関数の非可換化

北海道大学 大学院理学院 数学専攻  
齋藤琢弥 (Takuya SAITO)\*

## 概要

マトロイドとはグラフのサイクルの構造や行列の階数などを抽象化した概念であり、有限集合とその冪集合上の階数関数と呼ばれる整数值関数の組として定義される。また、その不変量はグラフの彩色多項式、線形符号の重さ多項式をはじめとする抽象化する前の多くの不変量を一般化していることが知られている。本講演では、階数関数の値域を一般の順序群としたマトロイドの非可換化を考える。

## 1 導入：グラフ彩色

多重辺とループを許した有限グラフ  $\Gamma = (V, E)$  に対して、その  $\lambda$ -頂点彩色とは、写像  $c: V \rightarrow [\lambda] := \{1, \dots, \lambda\}$  であって隣接する任意の 2 頂点  $u, v$  に対して  $c(u) \neq c(v)$  となるものである。グラフ  $\Gamma$  を固定し、

$$\chi(\Gamma; \lambda) = \{c: V \rightarrow [\lambda] \mid c \text{ は頂点彩色}\}$$

とおくと、実は  $\chi(\Gamma; \lambda)$  は  $\lambda$  に関する多項式になり、彩色多項式と呼ばれる。多項式になることは次の関係式から直ちに従う。

$$\chi(\Gamma; \lambda) = \begin{cases} \lambda^{|V|} & (E = \emptyset) \\ 0 & (\Gamma \text{ がループを持つ}) \\ \chi(\Gamma \setminus e; \lambda) - \chi(\Gamma/e; \lambda) & (e \in E \text{ がループではない}) \end{cases}$$

ここで  $\Gamma \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$  は  $e$  の削除、 $\Gamma/e$  は  $e$  による縮約、つまり  $e$  の両端を同一視し、さらに  $e$  を取り除いて得られるグラフである。一方で  $\kappa((V, S))$  を部分グラフ  $(V, S) \subset \Gamma$  の連結成分数とすると、包除原理から次の等式が成り立つ；

$$\chi(\Gamma; \lambda) = \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|} \lambda^{\kappa((V, S))}.$$

従って、辺の部分集合から誘導されるグラフの連結成分数  $\kappa((V, S))$  が、彩色多項式を考える上で重要な関数であるといえる。少し修正した次の関数  $\text{rank}: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}; S \mapsto |V| - \kappa((V, S))$  を考えると以下の性質を満たしている。

(R1)  $0 \leq \text{rank}(S) \leq |S|$  for all  $S \subset E$ ,

---

\* E-mail:saito.takuya.p6@elms.hokudai.ac.jp

(R2)  $\text{rank}(S_1) \leq \text{rank}(S_2)$  if  $S_1 \subset S_2 \subset E$ ,

(R3)  $\text{rank}(S_1 \cup \{e\}) - \text{rank}(S_1) \geq \text{rank}(S_2 \cup \{e\}) - \text{rank}(S_2)$  for all  $S_1 \subset S_2 \subset E, e \in E$ .

この性質を一般化したものがマトロイドである．本稿では値域を非負整数から順序群に一般化し，通常のマトロイドで成立する種々の性質が成り立つことを紹介する．また，可換な順序群に値域を持つ一般化に関する先行研究として [7]，一般的な双対性に関する先行研究として [3, 5] などを挙げておく．

## 2 マトロイドと多項式不変量

ここでは一般化する前のマトロイドに関して，基本的な事実をまとめておく．マトロイドやその多項式不変量に関する詳細は，それぞれ [6] や [2, 8] などを参照されたい．

**定義 1.** マトロイド  $M = (E, \text{rank})$  とは有限集合  $E$  と階数関数  $\text{rank} := \text{rank}_M : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  の組であって (R1),(R2),(R3) を満たすもののことである．

定義から直ちにグラフ  $\Gamma = (V, E)$  に対して  $M(\Gamma) = (E, |V| - \kappa((V, -)) : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0})$  はマトロイドになることがわかる．

**例 2** (線形マトロイド)．有限集合  $E$  で列に添字づけられた体  $\mathbb{K}$  を成分に持つ行列  $A$  を考える． $A_S$  を  $S \subset E$  で添字づけられた列のみから構成される  $A$  の部分行列とする．このとき  $\text{rank}(S) := \text{rank } A_S$  とおくと  $(E, \text{rank})$  はマトロイドになる．

$A$  の行空間  $\text{row}(A) \subset \mathbb{K}^E$  から  $\text{rank}(S) = \dim \text{row}(A) \cap \mathbb{K}^S$  として階数を定めたものとも一致する．

**定義 3** (双対, 削除, 縮約, 制限)．マトロイド  $M = (E, \text{rank})$  の双対は  $\text{rank}^*(S) := \text{rank}(E \setminus S) - \text{rank}(E) + |S|$  によって定義されるマトロイド  $M^* = (E, \text{rank}^*)$  である．マトロイド  $M = (E, \text{rank})$  の制限  $M|_T = (T, \text{rank}|_T)$  を階数関数の定義域を単に  $2^T$  に制限したものとして定義する．また，削除  $M \setminus T = M|_{E \setminus T}$  であり，その双対として縮約  $M/T = (M^* \setminus T)^*$  が定義される．実は  $\text{rank}_{M/T}(S) = \text{rank}(S \cup T) - \text{rank}(T)$  で与えられる．

マトロイドの削除と縮約はグラフにおけるその一般化である．また，双対は平面グラフの幾何学的双対の一般化である．線形マトロイドで考えた場合，双対は行空間の直交補空間が対応する．

さて，グラフの彩色多項式のマトロイドへの一般化である特性多項式と，その 2 変数版と言える多項式不変量を定義する．

**定義 4.**  $M = (E, \text{rank})$  をマトロイドとする．このとき，特性多項式  $\chi(M; t)$  と階数母関数，あるいは余階数零度多項式  $S(M; x, y)$  を以下のように定義する；

$$\begin{aligned} \chi(M; t) &= \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|} t^{\text{rank}(E) - \text{rank}(S)}, \\ S(M; x, y) &= \sum_{S \subset E} x^{\text{rank}(E) - \text{rank}(S)} y^{|S| - \text{rank}(S)}. \end{aligned}$$

グラフ  $\Gamma$  の彩色多項式は  $\chi(\Gamma; t) = t^{\kappa(\Gamma)} \chi(\Gamma; t)$  として計算できる.

**定理 5.** マトロイド  $M = (E, \text{rank})$  と  $e \in E$  に対して次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\chi(M; t) &= t^{\text{rank}(E) - \text{rank}(E \setminus e)} \chi(M \setminus e; t) - \chi(M/e; t), \\ S(M^*; x, y) &= S(M; y, x), \\ S(M; x, y) &= x^{\text{rank}(E) - \text{rank}(E \setminus e)} S(M \setminus e; x, y) + y^{|\{e\}| - \text{rank}(\{e\})} S(M/e; x, y), \\ S(M; x, y) &= (-1)^{\text{rank}(E)} \sum_{T \subset E} (-1)^{|T|} \chi(M/T; -x) \chi((M|_T)^*; -y).\end{aligned}$$

### 3 順序群

この節では順序群を導入する. より詳しい議論は [1] などを参照されたい.

**定義 6** (両側順序群).  $G$  を群,  $\leq$  を  $G$  の上の (半) 順序関係とする. 任意の  $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$  に対して,

$$h_1 g_1 h_2 \leq h_1 g_2 h_2 \text{ if } g_1 \leq g_2$$

が成り立つとき,  $(G, \leq)$  を両側順序群と呼ぶ.

定義から直ちに 3 つの不等式  $g_1 \leq g_2$ ,  $1_G \leq g_1^{-1} g_2$ ,  $1_G \leq g_2 g_1^{-1}$  が同値であることが従うことに注意しておく.

**例 7.** 実数の加法群の部分群  $G \subset (\mathbb{R}, +)$  と  $\mathbb{R}$  上の通常の順序  $\leq$  を考えると,  $(G, \leq)$  は両側順序群になる.

以降断らない限り  $G$  の乗法を積で書き, 単位元を  $1_G$  で書く.

**例 8** (Heisenberg 群 [1]).  $R$  を可換順序環とし, 一般線形群の部分群

$$H_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in R \right\}$$

を考える.  $X \geq 1_{H_3(R)}$  を以下の 3 つのいずれかを満たすときとする; (a)  $x > 0$ , (b)  $x = 0$  かつ  $y > 0$ , (c)  $x = y = 0$  かつ  $z > 0$ . この順序によって  $H_3(R)$  は両側順序群の構造を持つ.

**例 9** (組紐群 [4]).  $n$  次の組紐群

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{if } |i - j| \geq 2 \text{ for } i, j = 1, \dots, n-1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{for } i = 1, \dots, n-2 \end{array} \right\rangle$$

から  $\mathbb{Z}$  への準同型  $\sigma_i \mapsto 1 (i = 1, \dots, n-1)$  を考えると  $\mathbb{Z}$  の順序が自然に  $B_n$  の半順序を誘導し両側順序群の構造を持つ.

また,  $B_n$  から  $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  への自然な全射  $B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$  の核を純組紐群といい  $P_n$  と書く. 例えば  $P_1 \cong 1, P_2 \cong \mathbb{Z}$  であり明らかに両側順序群になる. さらに単完全列

$$1 \rightarrow F_{n-1} \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow 1$$

を考えることで  $P_{n-1}$  と  $n-1$  元集合で生成される自由群  $F_{n-1}$  に定まる両側順序群の構造から帰納的に  $P_n$  上の両側全順序群の構造が定まる。

また、組紐群  $B_n$  と純組紐群  $P_n$  の中心  $Z(B_n) = Z(P_n)$  は共に  $(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$  で生成される無限巡回群になる。

## 4 主結果

この節ではマトロイドの一般化として  $G$  値マトロイドを議論する。

**定義 10.** 有限集合  $E$  と順序群  $G$  に対して関数  $|-|_G : 2^E \rightarrow G; S \mapsto |S|_G$  が任意の  $S \subset E$  で  $|S|_G = \prod_{e \in S} |\{e\}|_G$ ,  $|S|_G \geq 1_G$  かつ  $|S|_G \in Z(G)$  を満たすとき長さ関数と呼ぶ。ここで,  $Z(G)$  は  $G$  の中心である。

**定義 11.** 有限集合  $E$  と順序群  $G$ , 長さ関数  $|-|_G : 2^E \rightarrow G$  に対して  $M = (E, |-|_G, \rho)$  が

(GR1)  $1_G \leq \rho(S) \leq |S|_G$  for all  $S \subset E$ ,

(GR2)  $\rho(S_1) \leq \rho(S_2)$  if  $S_1 \subset S_2 \subset E$ ,

(GR3)  $\rho(S_1 \cup \{e\})\rho(S_1)^{-1} \geq \rho(S_2 \cup \{e\})\rho(S_2)^{-1}$  for all  $S_1 \subset S_2 \subset E, e \in E$

を満たすとき  $G$  値マトロイドと定め,  $\rho$  を階数関数と呼ぶ,

(GR3) は任意の  $S_1 \subset S_2 \subset E$ ,  $S_3 \subset E$  で  $\rho(S_1 \cup S_3)\rho(S_1)^{-1} \geq \rho(S_2 \cup S_3)\rho(S_2)^{-1}$  と同値であること, 特に  $S_1 = \emptyset$  とすると  $\rho(S_3)\rho(S_2) \geq \rho(S_2 \cup S_3)$  になることに注意しておく。

**定理 12** (双対性).  $G$  値マトロイド  $M = (E, |-|_G, \rho)$  に対して  $M^* = M = (E, |-|_G, \rho^*)$  を  $\rho^*(S) = \rho(E \setminus S)\rho(E)^{-1}|S|_G$  とする。このとき  $M^*$  は  $G$  値マトロイドになる。この  $G$  値マトロイド  $M^*$  を  $M$  の双対と呼ぶ。さらに,  $(M^*)^*$  が成り立つ。

*Proof.* (GR1)  $S \subset E$  に対して

$$\begin{aligned} |S|_G &\geq \rho(E \setminus S)\rho(E)^{-1}|S|_G = \rho^*(S) && \text{(by (GR2), } \rho(E \setminus S) \leq \rho(E)) \\ &= \rho(\emptyset)\rho(S)^{-1}|S|_G && \text{(by (GR3), } \rho(E)\rho(E \setminus S)^{-1} \leq \rho(S)\rho(\emptyset)^{-1}) \\ &= 1_G && \text{(by (GR1), } \rho(S)^{-1}|S|_G \geq 1_G). \end{aligned}$$

(GR2)  $S_1 \subset S_2 \subset E$  に対して

$$\begin{aligned} \rho^*(S_1) &\geq \rho(E \setminus S_2)\rho(E)^{-1}|S_2|_G \\ &= \rho(E \setminus S_2)|S_2 \setminus S_1|_G|S_1|_G\rho(E)^{-1} \\ &\geq \rho(E \setminus S_2)\rho(S_2 \setminus S_1)|S_1|_G\rho(E)^{-1} && \text{(by (GR1), } |S_2 \setminus S_1|_G \geq \rho(S_2 \setminus S_1)) \\ &\geq \rho(E \setminus S_1)\rho(E)^{-1}|S_1|_G = \rho^*(S_1) && \text{(by (GR3), } \rho(E \setminus S_2)\rho(S_2 \setminus S_1) \geq \rho(E \setminus S_1)) \end{aligned}$$

(GR3)  $S_1 \subset S_2 \subset E$ ,  $e \in E$  に対して

$$\begin{aligned}
& \rho^*(S_1 \cup \{e\})\rho^*(S_1)^{-1} \\
&= \rho(E \setminus (S_1 \cup \{e\}))\rho(E)^{-1}|S_1 \cup \{e\}|_G(\rho(E \setminus S_1)\rho(E)^{-1}|S_1|_G)^{-1} \\
&= \rho(E \setminus (S_1 \cup \{e\}))\rho(E \setminus S_1)^{-1}|\{e\}|_G \\
&\geq \rho(E \setminus (S_2 \cup \{e\}))\rho(E \setminus S_2)^{-1}|\{e\}|_G & (\text{by (GR3)}) \\
&= \rho(E \setminus (S_2 \cup \{e\}))\rho(E)^{-1}|S_2 \cup \{e\}|_G(\rho(E \setminus S_2)\rho(E)^{-1}|S_2|_G)^{-1} \\
&= \rho^*(S_2 \cup \{e\})\rho^*(S_2)^{-1}.
\end{aligned}$$

よって  $M^*$  は  $G$  値マトロイド. 最後に  $\rho^{**} = \rho$  を確認する. 任意の  $S \subset E$  に対して,

$$\begin{aligned}
\rho^{**}(S) &= \rho^*(E \setminus S)\rho^*(E)^{-1}|S|_G \\
&= \rho(S)\rho(E)^{-1}|E \setminus S|_G(\rho(\emptyset)\rho(E)^{-1}|E|_G)^{-1}|S|_G \\
&= \rho(S)\rho(E)^{-1}|E \setminus S|_G|E|_G^{-1}\rho(E)\rho(\emptyset)^{-1}|S|_G \\
&= \rho(S)\rho(E)^{-1}\rho(E)|E \setminus S|_G|E|_G^{-1}|S|_G = \rho(S).
\end{aligned}$$

□

上記の定理に関しては [7, Section 5] と同様の方法で値域をブール束  $2^E$  の代わりに一般の束としても成立することに注意されたい.

**命題 13** (削除, 縮約).  $G$  値マトロイド  $M = (E, |-\|_G, \rho)$  に対して削除  $M \setminus T$  は  $G$  値マトロイドになる. さらに縮約  $M/T = (M^* \setminus T)^*$  の階数関数  $\rho_{M/T}$  は  $\rho_{M/T}(S) = \rho(S \cup T)\rho(T)^{-1}$  になる.

*Proof.* 削除  $M \setminus T$  が  $G$  値マトロイドになることは明らか. また,

$$\begin{aligned}
\rho_{M/T}(S) &= \rho_{M^* \setminus T}^*(S) = \rho_{M^* \setminus T}(E \setminus (S \cup T))\rho_{M^* \setminus T}(E \setminus T)^{-1}|S|_G \\
&= \rho^*(E \setminus (S \cup T))\rho^*(E \setminus T)^{-1}|S|_G \\
&= \rho(S \cup T)\rho(E)^{-1}|E \setminus (S \cup T)|_G(\rho(T)\rho(E)^{-1}|E \setminus T|_G)^{-1}|S|_G \\
&= \rho(S \cup T)\rho(T)^{-1}
\end{aligned}$$

より縮約の階数関数もわかる. □

さて,  $G$  値マトロイドに対しても多項式不変量に類するものを考えよう. 多項式が群環  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$  や  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}]$  の元であると思えることを思い出そう. この一般化として  $G$  値マトロイド  $M$  に対して群環  $\mathbb{Z}[G]$  と  $\mathbb{Z}[G \times G]$  の元を対応づける.

**定義 14.**  $M = (E, |-\|_G, \rho)$  を  $G$  値マトロイドとする. このとき, 特性多項式  $\chi(M) \in \mathbb{Z}[G]$  と修正階数母関数  $\tilde{S}(M) \in \mathbb{Z}[G \times G]$  を以下のように定義する;

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|} \rho(E)\rho(S)^{-1}, \\
\tilde{S}(M) &= \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|} (\rho(E)\rho(S)^{-1}, |S|_G \rho(S)^{-1}).
\end{aligned}$$

このとき、定理 5 と類似の以下の性質が成り立つ。

**定理 15.** マトロイド  $M = (E, \text{rank})$  と  $e \in E$  に対して次の等式が成り立つ;

- (i)  $\chi(M) = \rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1}\chi(M \setminus e; t) - \chi(M/e; t),$
- (ii)  $\tilde{S}(M^*) = (-1)^{|E|}\phi(\tilde{S}(M))$
- (iii)  $\tilde{S}(M) = (\rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1}, 1_G)S(M \setminus e) - (1_G, |\{e\}|_G\rho(\{e\})^{-1})S(M/e),$
- (iv)  $\tilde{S}(M) = \sum_{T \subset E} (-1)^{|T|}\chi(M/T)\chi((M|_T)^*)$

ただし、 $\phi : \mathbb{Z}[G \times G] \rightarrow \mathbb{Z}[G \times G]; \sum_{g_1, g_2} n_{g_1, g_2}(g_1, g_2) \mapsto \sum_{g_1, g_2} n_{g_1, g_2}(g_2, g_1)$  で定まる対合である。さらに最後の式で  $\chi(M/T)$  は単射  $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[G \times 1] \rightarrow \mathbb{Z}[G \times G]$ ,  $\chi((M|_T)^*)$  は単射  $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[1 \times G] \rightarrow \mathbb{Z}[G \times G]$  の元で  $\mathbb{Z}[G \times G]$  の元として扱う。

*Proof.* 定義に従い展開し、それぞれ等式を示す。

(i)

$$\begin{aligned}
 \chi(M) &= \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}\rho(E)\rho(S)^{-1} - \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}\rho(E)\rho(S \cup e)^{-1} \\
 &= \rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1} \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}\rho(E \setminus e)\rho(S)^{-1} \\
 &\quad - \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}\rho(E)\rho(\{e\})^{-1}\rho(\{e\})\rho(S \cup e)^{-1} \\
 &= \rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1}\chi(M \setminus e; t) - \chi(M/e; t).
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}(M^*) &= \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|}(\rho^*(E)\rho^*(S)^{-1}, |S|_G\rho^*(S)^{-1}) \\
 &= \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|}(\rho(\emptyset)\rho(E)^{-1}|E|_G(\rho(E \setminus S)\rho(E)^{-1}|S|_G)^{-1}, |S|_G(\rho(E \setminus S)\rho(E)^{-1}|S|_G)^{-1}) \\
 &= (-1)^{|E|} \sum_{S \subset E} (-1)^{|E \setminus S|}(|E \setminus S|_G\rho(E \setminus S))^{-1}, \rho(E)\rho(E \setminus S)^{-1}) \\
 &= (-1)^{|E|} \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|}(|S|_G\rho(S))^{-1}, \rho(E)\rho(S)^{-1}).
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}(M) &= \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S)^{-1}, |S|_G\rho(S)^{-1}) \\
 &\quad - \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S \cup e)^{-1}, |S \cup e|_G\rho(S \cup e)^{-1}) \\
 &= \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1}\rho(E \setminus e)\rho(S)^{-1}, |S|_G\rho(S)^{-1}) \\
 &\quad - \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(\{e\})^{-1}\rho(\{e\})\rho(S \cup e)^{-1}, |\{e\}|_G\rho(\{e\})^{-1}|S|_G\rho(S \cup e)^{-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1}, 1_G) \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|} (\rho(E \setminus e)\rho(S)^{-1}, |S|_G \rho(S)^{-1}) \\
&\quad - (1_G, |\{e\}|_G \rho(\{e\})^{-1}) \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|} (\rho(E)\rho(\{e\})^{-1}(\rho(S \cup e)\rho(\{e\})^{-1})^{-1}, |S|_G \rho(S \cup e)^{-1}) \\
&= (\rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1}, 1_G) S(M \setminus e) - (1_G, |\{e\}|_G \rho(\{e\})^{-1}) S(M/e).
\end{aligned}$$

(iv)  $S_1, S_2 \subset E$  が  $S_1 \neq S_2$  のとき  $\sum_{S_1 \subset T \subset S_2} (-1)^{|T|} = 0$  に注意する.

$$\begin{aligned}
&\sum_{T \subset E} (-1)^{|T|} \chi(M/T) \chi((M|_T)^*) \\
&= \sum_{T \subset E} (-1)^{|T|} \left( \sum_{S \subset E \setminus T} (-1)^{|S|} (\rho(E)\rho(S \cup T)^{-1}, 1_G) \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{S' \subset T} (-1)^{|S'|} (1_G, \rho_{M|_T}^*(T) \rho_{M|_T}^*(S')^{-1}) \right) \\
&= \sum_{T \subset E} (-1)^{|T|} \left( \sum_{S \subset E \setminus T} (-1)^{|S|} (\rho(E)\rho(S \cup T)^{-1}, 1_G) \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{S' \subset T} (-1)^{|S'|} (1_G, \rho(T)^{-1} |T|_G (\rho(T \setminus S) \rho(T)^{-1} |S'|_G)^{-1}) \right) \\
&= \sum_{T \subset E} (-1)^{|T|} \left( \sum_{S \subset E \setminus T} (-1)^{|S|} (\rho(E)\rho(S \cup T)^{-1}, 1_G) \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{S' \subset T} (-1)^{|S'|} (1_G, |T \setminus S'| \rho(T \setminus S')^{-1}) \right) \\
&= \sum_{T \subset E} \left( \sum_{T \subset S \subset E} (-1)^{|S|} (\rho(E)\rho(S)^{-1}, 1_G) \right) \left( \sum_{S' \subset T} (-1)^{|S'| - |T|} (1_G, |S'|_G \rho(S')^{-1}) \right) \\
&= \sum_{S, S' \subset E} (-1)^{|S|} (\rho(E)\rho(S)^{-1}, |S'|_G \rho(S')^{-1}) \left( \sum_{S' \subset T \subset S} (-1)^{|T| - |S'|} \right) \\
&= \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|} (\rho(E)\rho(S)^{-1}, |S|_G \rho(S)^{-1}).
\end{aligned}$$

□

上の定理の等式 (iv) は  $\tilde{S}(M)$  を  $\tilde{S}'(M) = \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|} \rho(E)\rho(S)^{-1} |S|_G \rho(S)^{-1} \in \mathbb{Z}[G]$  と置き換えても成立する一方で、等式 (iii) は成り立たないことにコメントしておく。

## 5 注意；直和に関して

マトロイド  $M_1 = (E_1, \text{rank}_1)$  と  $M_2 = (E_2, \text{rank}_2)$  の直和  $M_1 \oplus M_2 = (E_1 \sqcup E_2, \text{rank}_{M_1 \oplus M_2})$  を  $\text{rank}_{M_1 \oplus M_2}(S) = \text{rank}_1(S \cap E_1) + \text{rank}_2(S \cap E_2)$  によって定義する。直和はグラフの非交和でないし一点和や行空間の直和に対応している。このとき、 $\chi(M_1 \oplus M_2; t) = \chi(M_1; t) \chi(M_2; t)$

や  $T(M_1 \oplus M_2; x, y) = T(M_1; x, y)T(M_2; x, y)$  が成り立つ．さらに，削除や縮約と直和は可換な操作であり（両側）分配律  $(T(M_1 \setminus e; x, y) + T(M_1/e; x, y))T(M_2; x, y) = T(M_1; x, y)T(M_2; x, y) = T(M_1 \oplus M_2; x, y) = T(M_1 \oplus M_2 \setminus e; x, y) + T(M_1 \oplus M_2/e; x, y) = T(M_1 \setminus e; x, y)T(M_2; x, y) + T(M_1/e; x, y)T(M_2; x, y)$  などが成立する．このような性質は， $G$  値マトロイド  $M_1 = (E_1, |-\!|_G, \rho_1)$  と  $M_2 = (E_2, |-\!|_G, \rho_2)$  の直和  $M_1 \oplus M_2 = (E_1 \sqcup E_2, |-\!|_G, \rho)$  の階数関数を単なる積  $\rho(S) = \rho_1(S \cap E_1)\rho_2(S \cap E_2)$  で定めた場合には成立しない．

## 参考文献

- [1] Birkhoff, Garrett. *Lattice theory*. Vol. 25. American Mathematical Soc., 1940.
- [2] Ellis-Monaghan, Joanna A., and Iain Moffatt, eds. *Handbook of the Tutte polynomial and related topics*. CRC Press, 2022.
- [3] Gordon, Gary. “On Brylawski’s generalized duality.” *Mathematics in Computer Science* 6.2 (2012): 135-146.
- [4] Kassel, Christian, and Vladimir Turaev. *Braid groups*. Vol. 247. Springer Science & Business Media, 2008.
- [5] Martínez-Bernal, José, Miguel A. Valencia-Bucio, and Rafael H. Villarreal. “Hamming polynomial of a demimatroid.” *São Paulo Journal of Mathematical Sciences* 17.1 (2023): 268-299.
- [6] Oxley, James G. *Matroid theory*. Vol. 3. Oxford University Press, USA, 2006.
- [7] Vertigan, Dirk. “Latroids and their representation by codes over modules.” *Transactions of the American Mathematical Society* 356.10 (2004): 3841-3868.
- [8] White, Neil, ed. *Matroid applications*. No. 40. Cambridge University Press, 1992.